La terminologie et la linguistique
- les termes mathématiques et les relations logico-sémantiques

drt/ dr. Alice TOMA
Université de Genève/ Université de Bucarest
toma1@etu.unige.ch

Cet article traite un aspect de l'interférence entre la terminologie et la linguistique, en essayant de montrer les bénéfices que la terminologie tire de la linguistique, sans s'occuper des influences positives dans le sens envers, bien qu'il y en ait aussi. Pour ce faire, nous prenons, d'une part, les mathématiques en tant que matériel empirique, et, d'autre part, les relations logico-sémantiques – en tant qu'objet linguistique d'étude.

Nous allons commencer avec un court rappel de la base théorique sur laquelle notre aproche est développer. Ce cadre théorique a trois volets, selon qu'il vise la mathématique, la terminologie ou la linguistique.

1. Le cadre théorique épistémologique

Les mathématiques ne constituent pas une exception parmi les sciences "dures", en ce qui concerne leur épistémologie. Ainsi, on retrouve dans l'épistémologie des mathématiques les trois théories fondationistes des sciences: le nominalisme, le conceptualisme, l'intuitionisme.

Le nominalisme réduit l'existence des mathématiques à l'existence du langage mathématique, aux configurations finies des signes. Les mathématiques "traduites" en langage formel sont le résultat des calcules non contradictoires.

Le conceptualisme et l'intuitionisme considèrent les entités mathématiques comme des constructions mentales, plus précisément des créations de l'activité conceptuelle, qui n'ont pas une réalité en soi. Pour le réalisme, l'objet d'étude des mathématiques est un ensemble d'entités non spatiales, non mentales, atemporelles et non linguistiques. Les mathématiciens doivent découvrir ces entités et clarifier les relations qui les réunissent. Pour l'intuitionisme, les mathématiques sont équivalentes avec une activité indépendante, sans liaison avec le langage ou la logique.

Il faut préciser que les trois directions théoriques sont réductionistes. En étudiant le langage mathématique nous nous situons principalement sur une position nominaliste, mais pour bien comprendre le langage, nous ne pouvons pas ignorer l'objet mathématique (conceptualisme, réalisme).

2. La terminologie

La deuxième théorie utilisée dans notre analyse est la terminologie, représentée principalement par les études de M. T. Cabré et A. Bidu-Vrănceanu.

2.1. La bisystématicité et l'effet d'hystérèse sémantique. Bien qu'il soit un langage distinct, le langage spécialisé est en intéraction permanente avec la langue commune. Le langage mathématique a lui aussi cette caractéristique. Le langage mathématique utilise des mots de la langue naturelle, mais le contenu mathématique modifie le fonctionnement sémantique du système de la langue. Le terme de *bisystématicité* (Gentilhomme 2000) montre l'interdépendance langage – contenu. L'originalité textuelle des mathématiques est le résultat d'une interférence (action réciproque) d'une double systématicité: la systématicité linguitique et la systématicité mathématique proprement-dite. Cette bi-systématicité est transférée au niveau du terme et a pour résultat l'effet d'hystérèse sémantique, à savoir l'association entre le concept mathématique et le mot de la langue commune qui lui correspond. En d'autres termes, le terme garde avec soi le "souvenir" du mot qui est à son origine. Il a une conscience de larve, il comprend en même temps une idée "dure" (le concept) et une idée molle (la notion).

2.2. Le discours, le langage, la terminologie, le terme et le concept. À côté des termes souvent utilisés en terminologie (le *langage*, la *terminologie*, le *terme*, le *concept*) nous proposons l'ajout du terme *discours*. Il est étroitement relié avec les autres termes, fait qui résulte des définitions relationnelles. Ainsi, pour les mathématiques, les définitions relationnelles de la terminologie-instrument sont: i) Le langage mathématique (LM) est le résultat de la combinaison entre une composante naturelle et une composante artifficielle. ii) LM est la manifestation linguistique (sémiotique) du discours mathématique (DM). iii) La terminologie mathématique (TM) comprend l'ensemble des termes mathématiques. iv)Le terme mathématique (tM) est définie par une relation bijective avec un concept mathématique (cM). La terminologie lexicale met en évidence l'aspect linguistique du terme, en arrivant jusqu'à l'exclusion dans ses analyses du concept (compris comme le terme de E. Wüster), ce que nous schématisons avec le schéma relationnel suivant:

DM comprend LM comprend TM comprend tM+cM

Mais, pour garder la tradition des études terminologiques, à partir de Wüster, nous proposons de garder sous le terme de *terme* les deux parties, conceptuelle et linguistique, donc de ne pas enlever le concept comme la terminologie lexicale le fait:

DM comprend LM comprend TM comprend tM formé de tM linguistique ou notion + cM

3. La linguistique

Le cadre discursif résulté de l'introduction du terme de *discours* nous ouvre une perspective plus large d'analyse des termes, leur restituant le contexte. Un des aspects auquels l'analyse discursive s'intéresse ce sont *les relations logico-sémantiques*.

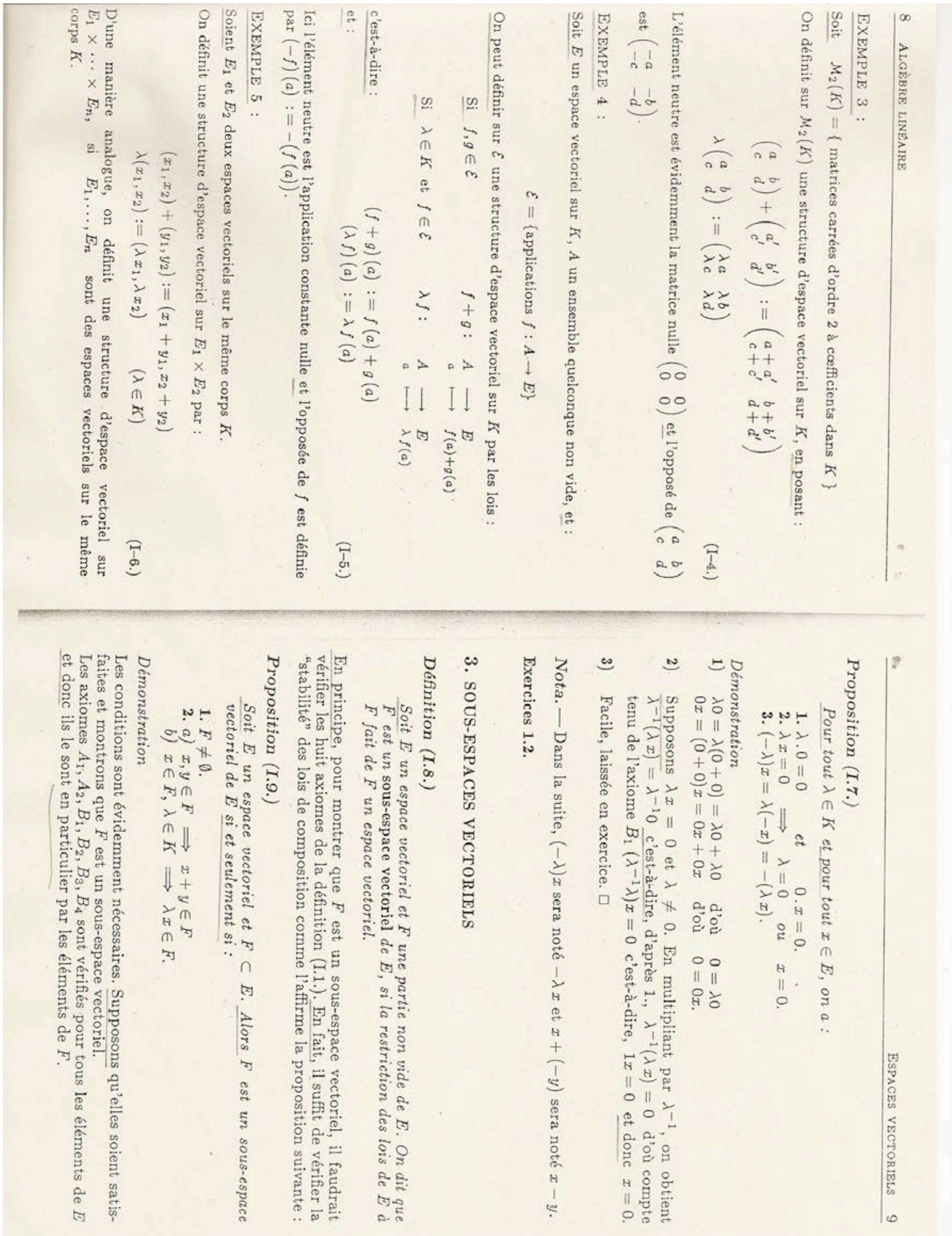
L'apport sémantique pour la terminologie est déjà bien connu[1]. Nous proposons ici une possible contribution d'un autre sous-domaine de la linguistique, l'analyse textuelle ou l'analyse du discours. Au centre de l'analyse textuelle se situe l'analyse des relations logico-sémantiques. Les relations logico-sémantiques sont les liaisons entre les parties (propositions, phrases, périodes) d'un texte qui lui assure l'architecture, sa construction même. “Tra le proposizioni di un testo sussistono in genere delle relazioni (relazioni semantiche) il cui riconoscimento è essenziale nella ricostruzione della architettura del testo (sia a livelo macrostrutturale che microstrutturale.)” (Manzotti 1994: 82).

Dans le texte, les relations sont souvent signalées par l'intermédiaire des *marques*.

4. Les relations logico-sémantiques entre les termes mathématiques

Quel est le rôle des marques de relation logico-sémantiques dans le langage mathématique?

[1]V., par exemple, la contribution de Michele Prandi dans ce colloque même.



8 ALGÈBRE LINÉAIRE

EXEMPLE 3 :

Soit $\mathcal{M}_2(K) = \{$ matrices carrées d'ordre 2 à cœfficients dans $K\}$

On définit sur $\mathcal{M}_2(K)$ une structure d'espace vectoriel sur K, en posant :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} \qquad \text{(I–4.)}$$

L'élément neutre est évidemment la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'opposé de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

EXEMPLE 4 :

Soit E un espace vectoriel sur K, A un ensemble quelconque non vide, et :

$$\mathcal{E} = \{\text{applications } f : A \to E\}$$

On peut définir sur $\mathcal{E}$ une structure d'espace vectoriel sur K par les lois :

Si $f, g \in \mathcal{E}$ $\qquad f+g : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ a & \longmapsto & f(a)+g(a) \end{array}$

Si $\lambda \in K$ et $f \in \mathcal{E}$ $\qquad \lambda f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ a & \longmapsto & \lambda f(a) \end{array}$

c'est-à-dire : $\quad (f+g)(a) := f(a) + g(a)$

et : $\quad (\lambda f)(a) := \lambda f(a) \qquad$ (I–5.)

Ici l'élément neutre est l'application constante nulle et l'opposée de f est définie par $(-f)(a) := -(f(a))$.

EXEMPLE 5 :

Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur le même corps K.

On définit une structure d'espace vectoriel sur $E_1 \times E_2$ par :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2) \qquad (\lambda \in K) \qquad \text{(I–6.)}$$

D'une manière analogue, on définit une structure d'espace vectoriel sur $E_1 \times \cdots \times E_n$, si $E_1, \ldots, E_n$ sont des espaces vectoriels sur le même corps K.

ESPACES VECTORIELS 9

Proposition (I.7.)

Pour tout $\lambda \in K$ et pour tout $x \in E$, on a :

1. $\lambda . 0 = 0$ *et* $0 . x = 0$.
2. $\lambda x = 0 \implies \lambda = 0$ *ou* $x = 0$.
3. $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$.

Démonstration

1) $\lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0$ d'où $0 = \lambda 0$
$0x = (0+0)x = 0x + 0x$ d'où $0 = 0x$.

2) Supposons $\lambda x = 0$ et $\lambda \neq 0$. En multipliant par λ^{-1}, on obtient $\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} 0$ c'est-à-dire, d'après 1., $\lambda^{-1}(\lambda x) = 0$ d'où compte tenu de l'axiome B_1 $(\lambda^{-1}\lambda)x = 0$ c'est-à-dire, $1x = 0$ et donc $x = 0$.

3) Facile, laissée en exercice. □

Nota. — Dans la suite, $(-\lambda)x$ sera noté $-\lambda x$ et $x + (-y)$ sera noté $x - y$.

Exercices 1.2.

3. SOUS-ESPACES VECTORIELS

Définition (I.8.)

Soit E un espace vectoriel et F une partie non vide de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** *de E, si la restriction des lois de E à F fait de F un espace vectoriel.*

En principe, pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, il faudrait vérifier les huit axiomes de la définition (I.1.). En fait, il suffit de vérifier la "stabilité" des lois de composition comme l'affirme la proposition suivante :

Proposition (I.9.)

Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $F \neq \emptyset$.
2. *a)* $x, y \in F \implies x + y \in F$
b) $x \in F$, $\lambda \in K \implies \lambda x \in F$.

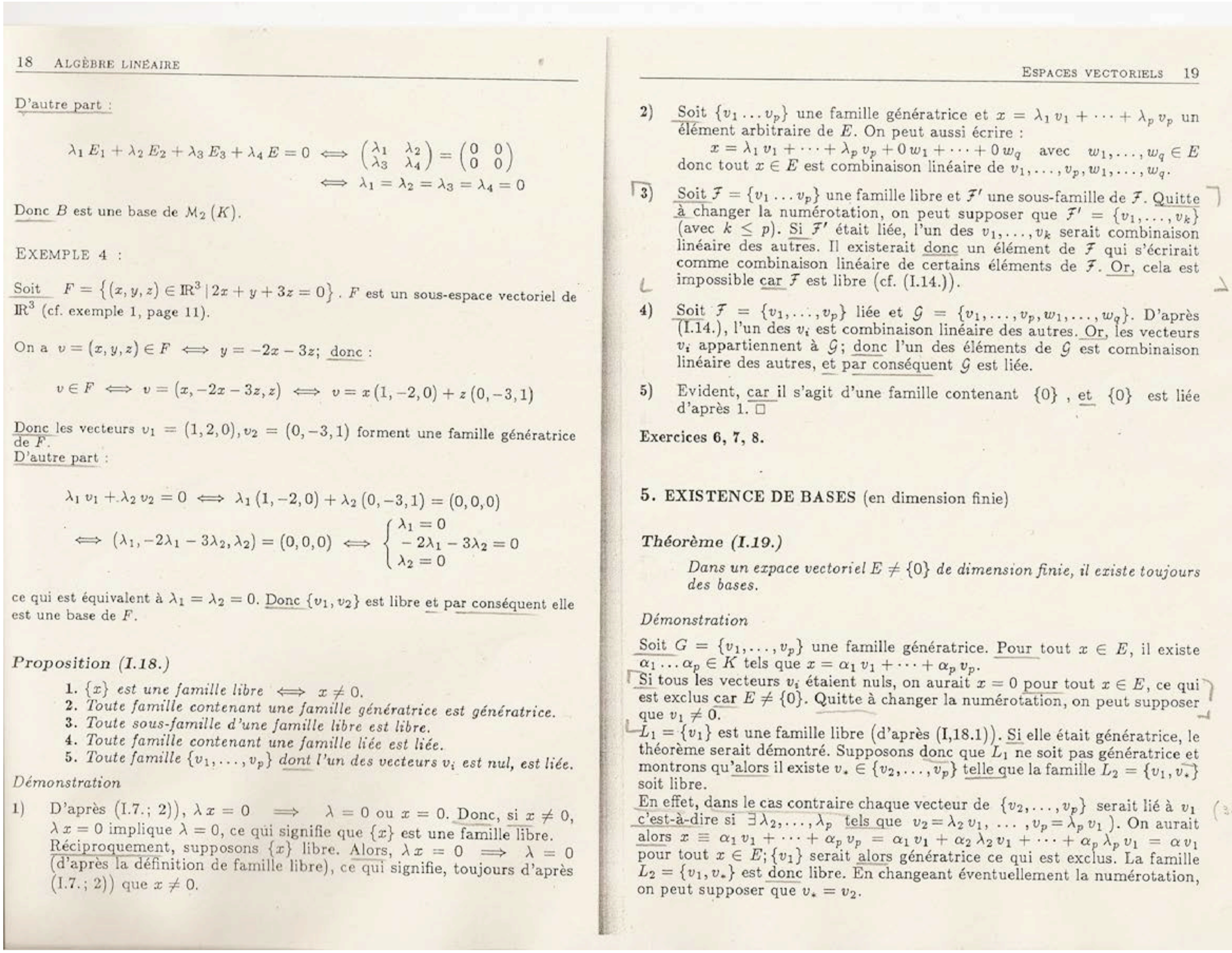
Démonstration

Les conditions sont évidemment nécessaires. Supposons qu'elles soient satisfaites et montrons que F est un sous-espace vectoriel.
Les axiomes $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4$ sont vérifiés pour tous les éléments de E et donc ils le sont en particulier par les éléments de F.

Fig. 1
Marques relationnelles
Grifone 1990: 8-9

Si l'on regarde une page de texte mathématique (v. ci-dessus), on constate que, même là où l'on renonce cvasi-généralement au langage naturel, les mots du langage naturel qui restent parmi les symboles sont les marques de relation. D'où une première hypothse: H1 = la présence des marques relationnelles est absolument nécessaire en mathématique. Mais on sait bien que, par exemple, la relation de disjonction est parfaitement représentable par le symbole logico-mathématique. D'où, une deuxième hypothèse: H2 = la présence des marques relationnelles en mathématique est un phénomène de rédundence .

Pour vérifier ces hypothèses, passons à l'analyse de quelques exemples. Soit un premier exemple, celui d'une condition complexe introduite par *quitte à*:



18 ALGÈBRE LINÉAIRE

D'autre part :

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Donc B est une base de $\mathcal{M}_2(K)$.

EXEMPLE 4 :

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 3z = 0\}$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (cf. exemple 1, page 11).

On a $v = (x,y,z) \in F \iff y = -2x - 3z$; donc :

$$v \in F \iff v = (x, -2x - 3z, z) \iff v = x\,(1,-2,0) + z\,(0,-3,1)$$

Donc les vecteurs $v_1 = (1,2,0), v_2 = (0,-3,1)$ forment une famille génératrice de F.
D'autre part :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \iff \lambda_1 (1,-2,0) + \lambda_2 (0,-3,1) = (0,0,0)$$
$$\iff (\lambda_1, -2\lambda_1 - 3\lambda_2, \lambda_2) = (0,0,0) \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc $\{v_1, v_2\}$ est libre et par conséquent elle est une base de F.

Proposition (I.18.)

1. *$\{x\}$ est une famille libre $\iff x \neq 0$.*
2. *Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.*
3. *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*
4. *Toute famille contenant une famille liée est liée.*
5. *Toute famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ dont l'un des vecteurs v_i est nul, est liée.*

Démonstration

1) D'après $(\text{I.7.}; 2))$, $\lambda x = 0 \implies \lambda = 0$ ou $x = 0$. Donc, si $x \neq 0$, $\lambda x = 0$ implique $\lambda = 0$, ce qui signifie que $\{x\}$ est une famille libre. Réciproquement, supposons $\{x\}$ libre. Alors, $\lambda x = 0 \implies \lambda = 0$ (d'après la définition de famille libre), ce qui signifie, toujours d'après $(\text{I.7.}; 2))$ que $x \neq 0$.

ESPACES VECTORIELS 19

2) Soit $\{v_1 \ldots v_p\}$ une famille génératrice et $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$ un élément arbitraire de E. On peut aussi écrire :
$$x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + 0\, w_1 + \cdots + 0\, w_q \quad \text{avec} \quad w_1, \ldots, w_q \in E$$
donc tout $x \in E$ est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q$.

3) Soit $\mathcal{F} = \{v_1 \ldots v_p\}$ une famille libre et $\mathcal{F}'$ une sous-famille de $\mathcal{F}$. Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que $\mathcal{F}' = \{v_1, \ldots, v_k\}$ (avec $k \leq p$). Si $\mathcal{F}'$ était liée, l'un des $v_1, \ldots, v_k$ serait combinaison linéaire des autres. Il existerait donc un élément de $\mathcal{F}$ qui s'écrirait comme combinaison linéaire de certains éléments de $\mathcal{F}$. Or, cela est impossible car $\mathcal{F}$ est libre (cf. (I.14.)).

4) Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ liée et $\mathcal{G} = \{v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q\}$. D'après (I.14.), l'un des v_i est combinaison linéaire des autres. Or, les vecteurs v_i appartiennent à $\mathcal{G}$; donc l'un des éléments de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire des autres, et par conséquent $\mathcal{G}$ est liée.

5) Evident, car il s'agit d'une famille contenant $\{0\}$, et $\{0\}$ est liée d'après 1. □

Exercices 6, 7, 8.

5. EXISTENCE DE BASES (en dimension finie)

Théorème (I.19.)

Dans un espace vectoriel $E \neq \{0\}$ de dimension finie, il existe toujours des bases.

Démonstration

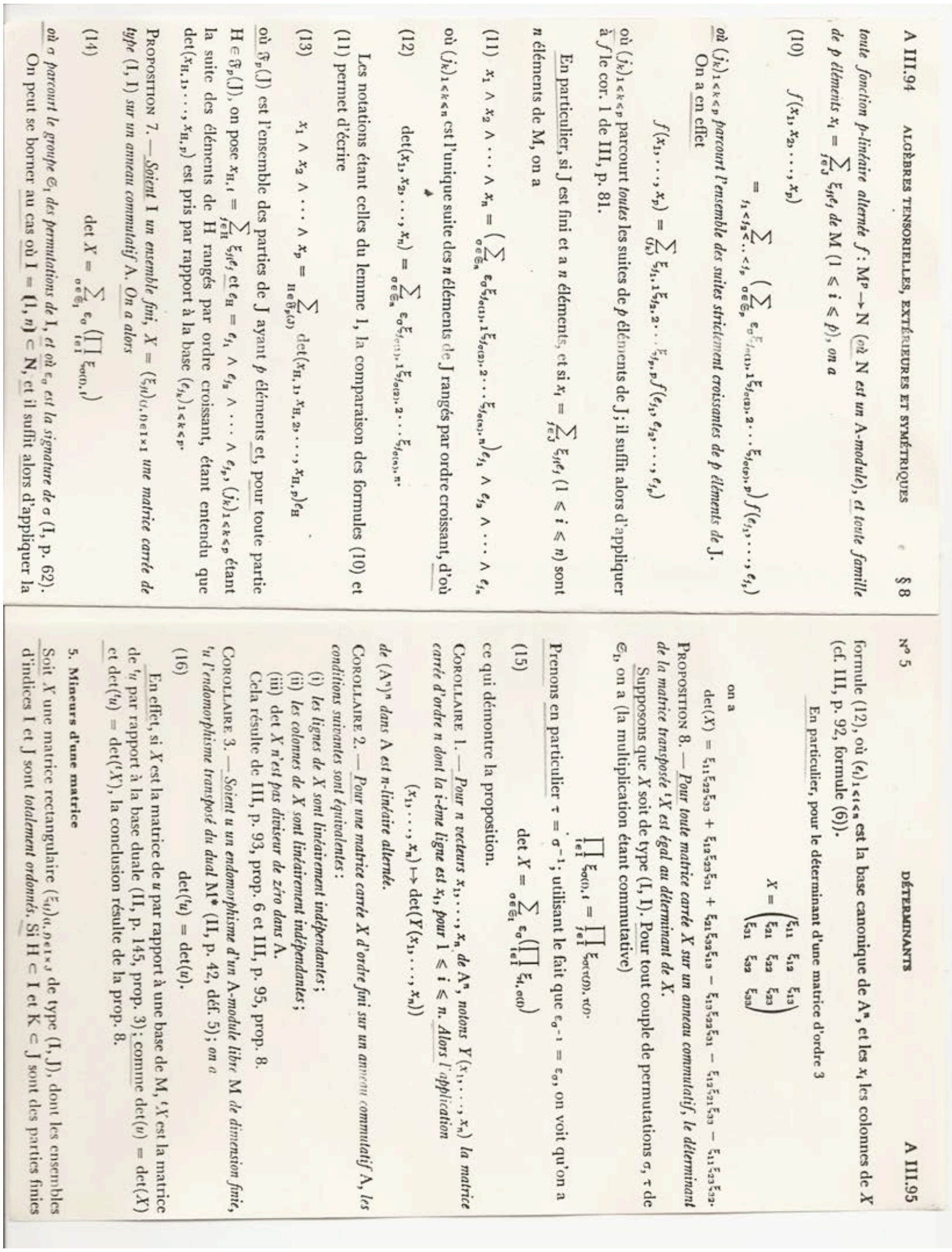
Soit $G = \{v_1, \ldots, v_p\}$ une famille génératrice. Pour tout $x \in E$, il existe $\alpha_1 \ldots \alpha_p \in K$ tels que $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$.
Si tous les vecteurs v_i étaient nuls, on aurait $x = 0$ pour tout $x \in E$, ce qui est exclus car $E \neq \{0\}$. Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que $v_1 \neq 0$.
$L_1 = \{v_1\}$ est une famille libre (d'après (I,18.1)). Si elle était génératrice, le théorème serait démontré. Supposons donc que L_1 ne soit pas génératrice et montrons qu'alors il existe $v_* \in \{v_2, \ldots, v_p\}$ telle que la famille $L_2 = \{v_1, v_*\}$ soit libre.
En effet, dans le cas contraire chaque vecteur de $\{v_2, \ldots, v_p\}$ serait lié à v_1 c'est-à-dire si $\exists \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que $v_2 = \lambda_2 v_1, \ \ldots\ , v_p = \lambda_p v_1$). On aurait alors $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_1 + \cdots + \alpha_p \lambda_p v_1 = \alpha v_1$ pour tout $x \in E$; $\{v_1\}$ serait alors génératrice ce qui est exclus. La famille $L_2 = \{v_1, v_*\}$ est donc libre. En changeant éventuellement la numérotation, on peut supposer que $v_* = v_2$.

Fig. 2
Exemple 1
Grifone 1990: 19

Les parties reliées par *quitte à* sont: la partie gauche : *p* = « on peut supposer que $v_1 \neq 0$ » et la partie droite : *q* = « (Quitte à) changer la numérotation » de la famille génératrice « $G = \{ v_1, \ldots, v_p\}$ une famille génératrice ». *Quitte à* nous donne l'instruction composée de trois pas : i) de regarder chaque élément de la famille *G; ii)* de vérifier s'il y a un élément différent de zéro; iii) dans un premier temps, de **garder la numérotation**, si le premier élément est égale à zéro ; dans un deuxième temps, **de changer la numérotation**, s'il y a un élément, autre que le premier élément de l'ensemble qui est différent de zéro (ce dernier devient le premier élément de l'ensemble). *Quitte à* nous permet de maintenir la vérité de *p* dans deux cas contraires, à savoir si l'on change ou si l'on ne change pas la numérotation. Si la prédication devient négative dans un seul cas (si le premier élément de l'ensemble est différent de zéro), elle reste positive dans tous les autres cas (si le premier élément n'est pas différent de zéro). La raison mathématique de ce changement de numérotation est de simplifier la démonstration du théorème. Autrement, sans changement de numérotation, il faut introduire un indice. *Quitte à* introduit une **condition complexe**. Il s'agit d'une condition en plus, une condition qui n'est pas décisive.

Si nous appliquons le test de supréssion, en effaçant *quitte à*, le texte devient "illisible", il perd son sens, nous ne pouvons pas recupérer dans le texte qui reste l'effet de double condition. (cf. « (Quitte à) changer la numérotation, on peut supposer que $v_1 \neq 0$ »). D'où une première conclusion: C1 = Les marques de relations sont absolument nécessaires dans le langage mathématique.

Prenons encore un exemple:



A III.94 ALGÈBRES TENSORIELLES, EXTÉRIEURES ET SYMÉTRIQUES § 8

toute fonction p-linéaire alternée $f : M^p \to N$ (*où* N *est un* A-*module*), *et toute famille de* p *éléments* $x_i = \sum_{j \in J} \xi_{ji} e_j$ *de* M $(1 \leqslant i \leqslant p)$, *on a*

(10) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_p} \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon_\sigma \xi_{j_{\sigma(1)},1} \xi_{j_{\sigma(2)},2} \cdots \xi_{j_{\sigma(p)},p} \Big) f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})$$

où $(j_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ *parcourt l'ensemble des suites strictement croissantes de* p *éléments de* J.

On a en effet

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{(j_k)} \xi_{j_1,1} \xi_{j_2,2} \cdots \xi_{j_p,p} f(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_p})$$

où $(j_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ parcourt *toutes* les suites de p éléments de J ; il suffit alors d'appliquer à f le cor. 1 de III, p. 81.

En particulier, si J est fini et a n éléments, et si $x_i = \sum_{j \in J} \xi_{ji} e_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n éléments de M, on a

(11) $$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n = \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \xi_{j_{\sigma(1)},1} \xi_{j_{\sigma(2)},2} \cdots \xi_{j_{\sigma(n)},n} \Big) e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}$$

où $(j_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est l'unique suite des n éléments de J rangés par ordre croissant, d'où

(12) $$\det(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \xi_{j_{\sigma(1)},1} \xi_{j_{\sigma(2)},2} \cdots \xi_{j_{\sigma(n)},n}.$$

Les notations étant celles du lemme 1, la comparaison des formules (10) et (11) permet d'écrire

(13) $$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_p = \sum_{H \in \mathfrak{F}_p(J)} \det(x_{H,1}, x_{H,2}, \ldots, x_{H,p}) e_H$$

où $\mathfrak{F}_p(J)$ est l'ensemble des parties de J ayant p éléments et, pour toute partie $H \in \mathfrak{F}_p(J)$, on pose $x_{H,i} = \sum_{j \in H} \xi_{ji} e_j$ et $e_H = e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}$, $(j_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ étant la suite des éléments de H rangés par ordre croissant, étant entendu que $\det(x_{H,1}, \ldots, x_{H,p})$ est pris par rapport à la base $(e_{j_k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$.

Proposition 7. — *Soient* I *un ensemble fini,* $X = (\xi_{ji})_{(i,j) \in I \times I}$ *une matrice carrée de type* (I, I) *sur un anneau commutatif* A. *On a alors*

(14) $$\det X = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_I} \varepsilon_\sigma \Big(\prod_{i \in I} \xi_{\sigma(i),i} \Big)$$

où σ *parcourt le groupe* $\mathfrak{S}_I$ *des permutations de* I, *et où* ε_σ *est la signature de* σ (I, p. 62).

On peut se borner au cas où $I = [1, n] \subset \mathbf{N}$, et il suffit alors d'appliquer la

N° 5 DÉTERMINANTS A III.95

formule (12), où $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la base canonique de A^n, et les x_i les colonnes de X (cf. III, p. 92, formule (6)).

En particulier, pour le déterminant d'une matrice d'ordre 3

$$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix}$$

on a

$$\det(X) = \xi_{11}\xi_{22}\xi_{33} + \xi_{12}\xi_{23}\xi_{31} + \xi_{21}\xi_{32}\xi_{13} - \xi_{13}\xi_{22}\xi_{31} - \xi_{12}\xi_{21}\xi_{33} - \xi_{11}\xi_{23}\xi_{32}.$$

Proposition 8. — *Pour toute matrice carrée* X *sur un anneau commutatif, le déterminant de la matrice transposée* ${}^tX$ *est égal au déterminant de* X.

Supposons que X soit de type (I, I). Pour tout couple de permutations σ, τ de $\mathfrak{S}_I$, on a (la multiplication étant commutative)

$$\prod_{i \in I} \xi_{\sigma(i),i} = \prod_{j \in I} \xi_{\sigma(\tau(j)),\tau(j)}.$$

Prenons en particulier $\tau = \sigma^{-1}$; utilisant le fait que $\varepsilon_{\sigma^{-1}} = \varepsilon_\sigma$, on voit qu'on a

(15) $$\det X = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_I} \varepsilon_\sigma \Big(\prod_{i \in I} \xi_{i,\sigma(i)} \Big)$$

ce qui démontre la proposition.

Corollaire 1. — *Pour* n *vecteurs* $x_1, \ldots, x_n$ *de* A^n, *notons* $Y(x_1, \ldots, x_n)$ *la matrice carrée d'ordre* n *dont la* i-*ème ligne est* x_i, *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$. *Alors l'application*

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det(Y(x_1, \ldots, x_n))$$

de $(A^n)^n$ *dans* A *est* n-*linéaire alternée.*

Corollaire 2. — *Pour une matrice carrée* X *d'ordre fini sur un anneau commutatif* A, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *les lignes de* X *sont linéairement indépendantes ;*

(ii) *les colonnes de* X *sont linéairement indépendantes ;*

(iii) $\det X$ *n'est pas diviseur de zéro dans* A.

Cela résulte de III, p. 93, prop. 6 et III, p. 95, prop. 8.

Corollaire 3. — *Soient* u *un endomorphisme d'un* A-*module libre* M *de dimension finie,* ${}^tu$ *l'endomorphisme transposé du dual* M* (II, p. 42, déf. 5) ; *on a*

(16) $$\det({}^tu) = \det(u).$$

En effet, si X est la matrice de u par rapport à une base de M, ${}^tX$ est la matrice de ${}^tu$ par rapport à la base duale (II, p. 145, prop. 3) ; comme $\det(u) = \det(X)$ et $\det({}^tu) = \det({}^tX)$, la conclusion résulte de la prop. 8.

5. Mineurs d'une matrice

Soit X une matrice rectangulaire $(\xi_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ de type (I, J), dont les ensembles d'indices I et J sont *totalement ordonnés*. Si $H \subset I$ et $K \subset J$ sont des parties finies

Fig. 3
Exemple 2
Bourbaki 1970 : A III.94-A III.95

Il s'agit d'une particularisation introduite par la marque *en particulier*. L'exemple est une proposition qui établit la formule de calcul d'un déterminant d'une matrice carrée. Pour faciliter la compréhension, regardons d'abord ce qui vient après la particule *en particulier*. La partie droite de la relation nous présente la formule de calcule du déterminant oour une matrice carrée d'ordre 3:

> Le déterminant d'une matrice d'ordre 3 est la somme des multiplications des éléments parallèles à la première diagonale, moins les multiplications des éléments parallèles à la seconde diagonale.

Passons à la partie qui précède la marque « en particulier ». La partie gauche de la relation de particularisation est la formule de calcule du déterminant d'une matrice carrée ayant un nombre fini de lignes et de colonnes. Alors :

> Le déterminant de la matrice X est la somme alternée des multiplications de n éléments, ayant la propriété de ne se trouver jamais sur la même ligne, ni sur la même colonne.

Qu'est-ce qu'il fait *en particulier* ? Il relie la formule du déterminant de matrice carrée d'ordre 3 à la formule (14) du déterminant d'une matrice carrée à nombre fini de ligne. *En particulier* assure le passage du général au particulier, du ***particularisé*** (Pé) au ***particularisant*** (Pnt). Quelques remarques qui s'imposent : les deux segments textuels, Pé et Pnt sont des segments symboliques (du langage artificiel, non pas naturel) ; les deux segments textuels se trouvent à distance de la particule *en particulier* ; les deux segments textuels sont des conclusions dans des constructions argumentatives du type : si p, alors q ; à la limite, les formules symboliques peuvent être réduites aux SN :

> « Un cas particulier du *déterminant d'une matrice carrée d'un nombre fini de ligne* est le *déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3* (3 ligne) »;

Donc, particulariser, dans cet exemple, c'est passer d'un nombre fini à un nombre précisément donné.

Si nous éliminons la marque *en particulier*, nous plongeons dans l'ambiguïté, mais une ambiguïté surmontable. La question qui se pose est: Il s'agit d'un exemple, d'un cas particulier ou d'un contre exemple? Mais la comparaison entre la partie gauche et la partie droite, élément par élément (par exemple *nombre fini* vs *3*) nous permet de découvrir les indices pour pouvoir récupérer et identifier une liaison du général au particulier, donc une relation de particularisation. Cette démarche, bien qu'il soit faisable est beaucoup plus coûteux du point de vue de l'effort cognitif nécessaire pour le traitement du texte et sa compréhension.

À ce point nous parvenons à une deuxième conclusion, qui contredit partiellement notre première conclusion: C2 = sans les marques relationnelles le texte garde sa 'lisibilité', le sens est récupérable, mais avec un effort cognitif supplémentaire.

En continuant le raisonnement nous pouvons aboutir à une conclusion qui contredit entièrement notre première conclusion: C3 = les marques de relation ne sont pas nécessaires. L'introduction d'une marque qui spécifie la realtion n'a aucun apport à la sémantique du texte. En effet, par exemple, la démonstration par induction constitue une particularisation de type spécial que tout le monde connaït. Dans ce cas il n'y a pas de marque de particularisation. Et pourtant, le raisonnement inductif est claire et facile à comprendre.

5. La sémantique relationnelle des termes mathématiques

Nous avons examiner deux types de relations: la condition complexe (CdtC); et la particularisation (P) qui reliaient les termes mathématiques suivant: *vecteur*, *famille génératrice*; respectivement, *déterminant d'une matrice d'ordre n*, *déterminant d'une matrice d'ordre 3*. Si nous prenons ces deux paires de termes et si nous essayons de varier les relations entre eux, en utilisant différentes marques relationnelles, nous constatons que, pour certaines relations, l'introduction de certains marques n'est pas possible, elle est bloquée par le contenu mathématique même que les termes véhiculent, posent ou présupposent. Ainsi nous pouvons construire les relations:

(vecteur *v1 # 0*) CdtC <u>quitte à</u> (famille génératrice *G = {v1, ..., vp}*)
(déterminant d'une matrice d'ordre n) P <u>en particulier</u> (déterminant d'une matrice d'ordre 3)

tandis que les relations suivantes ne sont pas acceptables:

*(vecteur *v1 # 0*) CdtC <u>donc</u> (famille génératrice *G = {v1, ..., vp}*)
*(déterminant d'une matrice d'ordre n) P <u>par exemple</u> (déterminant d'une matrice d'ordre 3)

La même chose pour les exemples suivants:

triangle, donc poligon
*triangle, en particulier poligon
poligon, en particulier triangle
poligon, par exemple triangle
*polidon, donc triangle

Quelle pourrait être alors la conclusion?

6. Conclusion. Les bénéfices de la terminologie

Les H1 et H2 sont fausses aussi bien que les conclusions C1 et C3. Les marques relationnelles ne sont pas absolument nécessaires dans le langage mathématique, mais elle ne sont non plus un phénomène de redondance. Nous gardons donc la conclusion C2, enrichie: les marques de relation organise le “tissu” du texte mathématique et assure **l'effort de traitement cognitif minimal** pendant sa lecture.

En plus, nous pouvons proposer une amélioration de la définifion du terme mathématique: chaque terme mathématique contient un trait sémantique comprenant une information relationnelle par rapport aux autres termes. Mais cette information relationnelle n'est pas une spécification fine. Elle indique la classe de relations sémantiques possibles entre deux termes mathématiques, sans pour autant pouvoir indiquer la relation précise.

Bibliographie

Austin J.L. 1970: *Quand dire c'est faire,* Édifions Du Seuil, Paris, Pour La Traduction Française.

Bidu-Vrănceanu, Angela et al. 2000: Terminologiile ştiinţifice din perspectivă interdisciplinară, în *Analele Universităţii Bucureşti*, EUB, Bucureşti.

Cabré Castellví, Maria Teresa 1993: *La terminología. Teoría, metodología, aplicaciones/ La Terminologia: la teoria, els mètodes, les aplicacions*, Barcelona, Editorial Antártida/ Empúries.

Cabré, Maria Teresa 1998: *La terminologie. Théorie,méthode et applications*, Ottawa/ Paris, Les Presses de l'Université d'Ottawa/ Masson et Armand Colin Editeurs.

Candel, Danielle 1997: Lexicographie de specialite. Domaine : Mathematique*,* în *Cahiers de lexicologie*, 1997-II, 21-36.

Candel, Danielle; Lejeune, Danielle 1998: Définir en mathémjatiques. Regards lexicographiques sur des textes de mathématiques*,* în *Cahiers de lexicologie*, LXXIII-II, 43-60.

Gentilhomme, Yves 2000: Termes et textes mathématiques. Réflexions linguistiques non standard, în *Cahier de lexicologie*, 76, 57-89.

Manzotti, Emilio; Ferrari, Angela 1994: *Insegnare italiano. Principi, metodi, esempi*, Brescia, Editrice La Scuola.

Marcus, Solomon 1970 : Structurile verbale ale textelor romanesti de matematica, în Ion Coteanu (coord.) *Sistemele limbii*, Editura Academiei Romane, 223-226.

Marcus, Solomon 1975 : The metaphors and the metonymies of the scientific (especially mathematical) language, în *Revue Roumaine de Linguistique* vol.20, fasc.5, 535-537.

Pârvu, Ilie 1984: *Introducere în epistemologie*, vol. I, II, Bucureşti, Editura ştiinţifică şi Enciclopedică.

Roulet, Eddy; Filliettaz, Laurent ; Grobet, Anne 2001 : *Un modèle et un instrument d'analyse de l'organisation du discours*, Peter Lang, Editions scientifiques européennes ;

Toma, Alice 2006 : *Lingvistică şi matematică*, Bucureşti, EUB.